Stefan Götz und Esther Ramharter, Wien

Begriffsbildung in der Mathematik

Amphibium zwischen Zwang und Freiheit

Zusammenfassung

Begriffsbildung spielt in der Mathematik eine zentrale Rolle und sollte dies daher auch im Mathematikunterricht tun. Zweierlei ist dabei zu beachten: Zum einen ist es oft so (gewesen), dass die Schärfung eines mathematischen Begriffs, letztlich seine Definition, am Ende — und nicht am Anfang — einer langen Entwicklung, die von Problem-, Fragestellungen etc. gekennzeichnet ist, gestanden ist bzw. steht. Beim Reden über Mathematik, egal ob es sich um einen wissenschaftlichen Vortrag handelt oder um den Mathematikunterricht, ist es oft umgekehrt.

Zum anderen grenzen Definitionen mathematische Begriffe nicht immer so ein, wie das zum Zeitpunkt der Festsetzung (der Erfindung) gedacht worden ist. Sie entwickeln ein Eigenleben, welches erst entdeckt werden muss. Dabei inspirieren sie oft zu Erweiterungen oder zum Umdefinieren. Beispiele zur (historischen) Genese wichtiger mathematischer Begriffe sollen im Beitrag ebenso präsentiert werden wie didaktische Implikationen daraus für den Mathematikunterricht. Dabei spielen natürlich inner- und außermathematische (Quer-)Verbindungen eine wichtige Rolle, die das Prinzip der Fundamentalen Ideen, welches dem Mathematikunterricht zugrunde gelegt werden kann, wesentlich unterstützen können.

1 Warum und wozu Definitionen im Mathematikunterricht?

Begriffsbildung spielt eine zentrale Rolle in der Mathematik und findet einen (vorläufigen) Abschluss in einer Definition[1]. Mathematik kann sogar als diejenige Wissenschaft verstanden werden, in der als einziger Definieren wirklich möglich ist. Ein solches Verständnis von Mathematik kann sich u. a. auf Kant stützen, der sagt: „*Definieren* soll, wie der Ausdruck selbst es gibt, eigentlich nur so viel bedeuten, als, den ausführlichen Begriff eines Dinges innerhalb seiner Grenzen ursprünglich darstellen." (Kant KrV, B 755) und ergänzt, dass also nur die Mathematik ihre Begriffe definiert. Die „Ausführlichkeit" eines Begriffs meint nämlich, dass dessen Bedeutung durch die Definition vollständig und endgültig erfasst ist; empirische Begriffe (Kant wählt als Beispiel Gold) lassen sich dagegen nie in allen (auch zukünftigen) Bestimmungen festlegen, neue Erkenntnisse können uns bei empirischen Begriffen dazu nötigen, Eigenschaften, die wir als wesentlich für einen bestimmten Begriff angesehen haben, als nicht mehr essentiell oder gar mit dem Begriff unverträglich anzusehen. Mathematischen Begriffen dagegen können wir unseren Willen aufzwingen; wie wir sie definiert haben, so sind sie, und keine Erfahrung kann uns Anderes lehren – meint jedenfalls Kant. *Wir* sind beim Definieren mathematischer Begriffe frei, laut Kant (wir „konstruieren" die Begriffe, wie er sagt), *die Begriffe* dagegen unterliegen in der Mathematik einem stärkeren Zwang als in allen anderen Wissenschaften.

[1] Einführende Darstellungen zur Frage „Was ist eine Definition?" bietet z. B. Savigny 1987 oder Ramharter (voraussichtlich 2011).

Abbildung 1: Raffaels Schule von Athen

Der Kant'sche Standpunkt soll hier nicht weiter diskutiert werden; im Folgenden wird allerdings kurz eine besondere Art der Herausforderung für eine solche Auffassung von strengen, unveränderlichen Definitionen in der Mathematik vorgestellt werden: Begriffe können aus anderen Gebieten in die Mathematik hinein wandern bzw. umgekehrt, mathematische Begriffe können Begriffe außerhalb der Mathematik prägen oder verändern. Exemplarisch beschäftigen wir uns mit dem Raum-Begriff[2].

Die alltäglichen und aus anderen Wissenschaften stammenden Konzepte und Vorstellungen von Raum, Linie, Ebene, Fläche, etc. haben wohl seit jeher – jedenfalls seit der Antike – die Entwicklung der Geometrie geprägt. Umgekehrt hat die Geometrie das Verständnis von Raum auch außerhalb ihrer stark beeinflusst, so stark, dass im 19. Jahrhundert die Geometrie zu einem dominanten Maßstab für die Kunst geworden ist, mittels dessen auch frühere Epochen beurteilt wurden: „Wenn man alles summiert, was in formaler Hinsicht gegen die Kunst des Mittelalters spricht, so läuft es auf den Vorwurf hinaus: ‚Es gibt kein Raumverständnis', und dieser Vorwurf bedeutet im Klartext, daß eine räumliche Einheit fehlt, daß das Schema des euklidisch-kantischen Raums fehlt, das sich in der Malerei auf das Zusammenlaufen der Linien und die Proportionalität reduzieren lässt, genauer gesagt, auf eine einheitliche Perspektive." (Florenski 1997, 37; daher stammen auch die folgenden kunsthistorischen Überlegungen). Dieser Forderung nach der Einhaltung des Schemas halten auch bedeutende Kunstwerke offensichtlich nicht stand: Abbildung 1. Die so mächtig wirkende Halle in Raffaels „Schule von Athen" ist, folgt man den Gesetzen der Perspektive, kaum mehr als zwei Menschengrößen hoch, hat also nur etwa die Höhe einer Altbauwohnung. Die wesentlichen Figuren des Gemäldes müssten, wäre es unter Einhaltung der Zentralperspektive gemalt, winzig sein (Abbildung 2). Mehrfache Brüche der Perspektive machen es möglich, die Halle majestätisch wirken zu lassen und gleichzeitig die Figuren, um die es ja geht in dem Bild, in einer ihrer Wichtigkeit entsprechenden Größe erscheinen zu lassen.

Raffaels „Schule von Athen" zeigt also, dass es selbst am Höhepunkt der Perspektive Prinzipien – symbolische Ordnungen – gibt, die für wichtiger genommen werden als die Gesetze des euklidisch-perspektivischen Raumes. (Man beachte in diesem Zusammenhang auch, dass der Fluchtpunkt genau in Aristoteles' Hand liegt.) Im 20. Jahrhundert setzt sich diese Auffassung eines abstrakter geordneten Raumes, die in der Praxis schon vorhanden war

[2]Gerade dieser „Begriff" ist allerdings laut Kant keiner, sondern eine „Form der Anschauung".

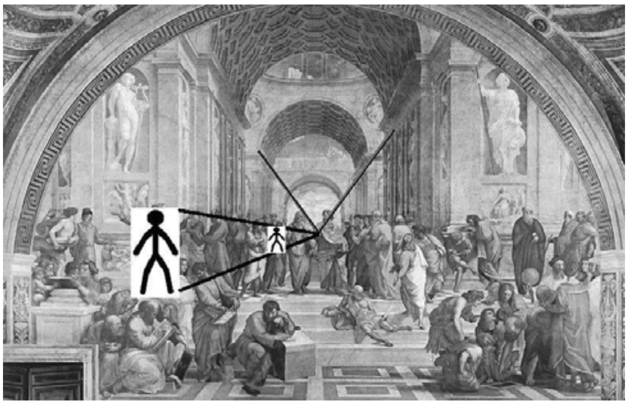


Abbildung 2: Fluchtpunkt in Raffaels Schule von Athen

(Ikonen etwa können als umso gelungener angesehen werden, je mehr verschiedene Ansichten einer Person sie in einem Bild zeigen), auch in der Theorie durch. Auch die „Räume" in der Mathematik werden abstrakter. Wechselwirkungen in den Entwicklungsprozessen der heutigen Raumbegriffe in der Mathematik und der Kunst (Descartes' Interesse an der „Ordnung" etwa müsste dabei behandelt werden) können hier nicht studiert werden, es ging uns nur darum aufzuzeigen, dass Begriffe nicht immer innerhalb der Mathematik entstehen und sich entwickeln und eine klare Trennung zwischen „unveränderlichen" mathematischen Begriffen und empirischen Begriffen sich jedenfalls gegen einige Schwierigkeiten durchzusetzen hätte.

Auch in der Mathematik-Didaktik ist man sich der Komplexität dessen, was im Umfeld der fertigen Definitionen geschieht, bewusst und sieht darin einen Gegenstand notwendiger Aufmerksamkeit. Folgt man dem Konzept der Fundamentalen Ideen, so sollten Definitionen und ihre Genese auch im Mathematikunterricht prominent vorkommen. Die Struktur der zugrundeliegenden Wissenschaft solle sich im dazugehörigen Unterricht widerspiegeln, so lautet etwas vereinfacht eine Forderung, um nicht zu sagen die Forderung der Fundamentalen Ideen.

Dazu zweierlei: Erstens haben wir gesehen (z. B. anhand des Raumbegriffs), dass Problem- und Fragestellungen historisch betrachtet oft eine sehr lange Zeit gebraucht haben, bevor „endgültige" Definitionen vereinbart worden sind. Sie stehen also häufig erst am Ende einer langen Entwicklung. Das Reden über Mathematik, egal ob es sich dabei um einen Vortrag oder den Unterricht handelt, bringt meist genau die umgekehrte Reihenfolge mit sich. Am Beginn steht eine Definition (oder mehrere), und dann wird daraus abgeleitet, gefolgert (Vortrag), oder damit gerechnet (Unterricht). Es ist natürlich illusorisch, und es wäre auch gar nicht wünschenswert, in jedem Fall die historische Genese eines neuen Begriffs in den Unterricht einfließen zu lassen. Zahlreiche Vorschläge dazu gibt es natürlich, stellvertretend sei nur Kronfellner 1998 genannt.

Tatsächlich geht es uns um ein mehr oder weniger ausgewogenes Verhältnis zwischen Definitionen einerseits (die eher statisch gesehen werden) und der dahinter steckenden dynamischen Begriffsentwicklung andererseits, wie das auch Vinner 1991 beschreibt. Dieses wechselseitige Verhältnis, die gegenseitige Beeinflussung, kann das Verständnis für die Mathematik an sich (wieder im Sinne der Fundamentalen Ideen) stärken.

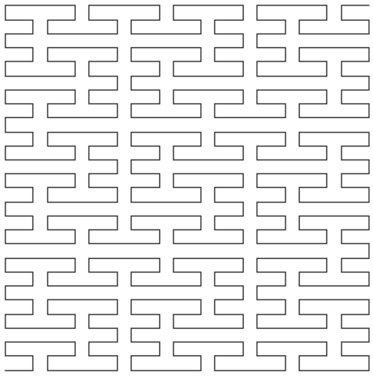


Abbildung 3: Die flächenfüllende PEANOkurve

Zweitens interessiert uns das Spannungsfeld zwischen *Erfindung* und *Entdeckung*. Begriffe wie z. B. der der Kurve werden letztlich (oft aus gutem Grund) erfunden und definiert. Jedoch entwickeln sie dann manchmal ein *Eigenleben* nach der Eingrenzung eines Begriffs: auf einmal entdeckt man *flächenfüllende* Kurven, an die man vielleicht (wahrscheinlich) bei der Festsetzung des Begriffs „Kurve“ nicht gedacht hat, und es ist zu vermuten, dass diese Implikation auch gar nicht gewollt war: Abbildung 3. Bevor wir anhand von konkreten Beispielen aus der (Schul-)Mathematik zeigen werden, wie Definitionen sinnvoll (in obigem Sinne) in den Unterricht integriert werden können, sehen wir uns an, was die gesetzlichen Vorgaben durch den Lehrplan und die Bildungsstandards zu Definitionen im Mathematikunterricht meinen.

2 Was sagt der Lehrplan?

Die folgenden Zitate aus dem Lehrplan sind einfach mittels Suchbefehls nach „Definieren“ bzw. „Definition“ eruiert worden.

In der *AHS-Unterstufe* sind folgende *mathematischen Grundtätigkeiten* zu entwickeln: „[...] Argumentieren und exaktes Arbeiten, insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (*Definieren*); Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Arbeiten mit logischen Schlussweisen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform). [...]“ ([14], 1, Hervorhebung von S. G.).

In der *AHS-Oberstufe* ([13]) findet sich so: Definieren

- (Beschreiben und Untersuchen) von abschnittweise definierten Funktionen,
- von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ für $0° \leq \alpha \leq 360°$,
- von Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten,
- von Wurzeln und Logarithmen,
- (intuitives Erfassen und Definieren) des Begriffes Grenzwert von Folgen,

- der EULER'schen Zahl,
- sowie Darstellen und Untersuchen von Potenzfunktionen, von Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie von Winkelfunktionen (Bogenmaß),
- des vektoriellen Produkts,
- des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate) und
- des bestimmten Integrals.

Bemerkenswert ist die ganz unterschiedliche Einbettung des Definierens in der Unter- bzw. Oberstufe: wird zuerst noch ganz allgemein die Tätigkeit des Definierens angeführt, steht dann die Kenntnis ganz konkreter Begriffe auf dem Plan. Doch nur die Wiedergabe von mathematischen Begriffen erscheint uns zu wenig, um die Kraft, um den Sinn und um die Auswirkungen dieser mathematischen Grundtätigkeit wenigstens exemplarisch demonstrieren zu können.

3 Und die Bildungsstandards (für die achte Schulstufe)?

Wie beim Lehrplan machen wir uns bei den Bildungsstandards für die achte Schulstufe ([23]) auf die Suche und werden auch fündig.

Die *bildungstheoretische Orientierung* der Standards sieht neben der *Lebensvorbereitung* auch die *Anschlussfähigkeit* vor. Sie „erfordert nicht grundsätzlich andere mathematische Fähigkeiten als die unmittelbare Lebensvorbereitung, sie verweist jedoch auch auf inhaltliche Erweiterungen, nimmt auf eine deutlichere Explizierung (inner-)mathematischer Zusammenhänge und Strukturen Bedacht und betont spezifische mathematische Tätigkeiten (Formalisieren, *Definieren*, Beweisen u. Ä.) stärker.“ ([23], 8, Hervorhebung von S. G.).

Im Inhaltsbereich *Zahlen und Maße* findet sich wieder bezogen auf die *Anschlussfähigkeit*: „Im Hinblick auf eine tiefergehende Untersuchung funktionaler Zusammenhänge als mathematische Strukturen bzw. Modelle (Funktionenlehre, Analysis) sind grundlegendes Wissen über die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (*definitorische* und zentrale Eigenschaften, symbolische und grafische Darstellungen – insbesondere Schreibweisen und Zahlengerade, Beziehungen untereinander) sowie über Potenzen (mit beliebiger Basis, Exponenten aus $\mathbb{Z}$) und Wurzeln (Schreibweise, *Definition*, zentrale Eigenschaften, Potenzrechenregeln) von Bedeutung.“ ([23], 17, Hervorhebungen von S. G.).

Das Beispiel zur Illustration der Kompetenz *H4* (Argumentieren, Begründen)-*I1* (Zahlen und Maße)-*K1* (Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten) lautet:

„**Potenzen**

Gegeben ist folgende Aussage: $\frac{5^5}{5^3} = 5^2$

Aufgabe: Zeige, dass obige Aussage gilt! [...]

Richtige Lösung:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^2$$

Hinweise zur Lösung: Der Nachweis in der angegebenen Lösung wird durch Rückgriff auf die *Definition* von Potenzen erbracht. [...]

Andere, ebenso als richtig zu wertende Lösungen:

Nachweis durch Ausrechnen und Anwendung der *Definition*:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{3125}{125} = 25 = 5^2 \quad [\ldots]“$$

Der angesprochene Komplexitätsbereich *K1* wird wie folgt erklärt: „Die Aufgabe kann durch unmittelbares Anwenden einer elementaren Potenzrechenregel, durch direktes Anwenden der *Definition* von Potenzen oder durch Ausrechnen und Anwenden der *Definition* von Potenzen gelöst werden.“ ([23], 37 f., Hervorhebungen teilweise von S. G.).

Der Vollständigkeit halber sei noch auf den Inhaltsbereich *Statistische Darstellungen und Kenngrößen* hingewiesen, der für die *Lebensvorbereitung* Folgendes leistet: „[...] ‚Aktive‘ Handlungen wie Darstellen, Modellbilden oder Operieren werden sich in alltäglichen Lebenssituationen auf eher einfache Situationen beschränken (oder technologieunterstützt durchzuführen sein); Argumentieren, Begründen wird sich auf grundlegende (*definitorische*) Eigenschaften statistischer Konzepte stützen. [...]“ ([23], 95, Hervorhebung von S. G.).

4 Klassifikation von Definitionsbildungsprozessen

In Ouvrier-Buffet 2002, 384, finden wir die folgende Einteilung der Möglichkeiten, zu Definitionen in der Mathematik zu kommen:

P1: Eine Definition kann ausgehend von *Beispielen* und *Gegenbeispielen* konstruiert werden.

Zum Beispiel: Funktionsbegriff, Stetigkeitsbegriff. Letzterer wird als unser erstes Beispiel diskutiert werden.

P2: Eine Definition kann durch die Lösung einer *Problemsituation*, durch einen *Beweis* erzeugt werden (*beweiserzeugte Definitionen*).

Zum Beispiel: Binomialkoeffizient. Ein Auswahlproblem, nämlich k Elemente aus einer n-elementigen Menge ohne Wiederholung auszuwählen, führt auf ihn.

P3: Eine Definition kann durch einen *Modellierungsprozess* motiviert sein.

Zum Beispiel: Momentangeschwindigkeit. Das Betrachten immer kleiner werdender Zeitintervalle und der Wege, die in solchen zurückgelegt werden, fordert die Modellbildung der Grenzwertberechnung dieser Geschwindigkeiten heraus. Was dabei mathematisch entsteht, hat nur approximativ eine Entsprechung in der Realität. Dennoch ist der so geschaffene Begriff sehr leistungsfähig bei der Erklärung von kinematischen Phänomenen.

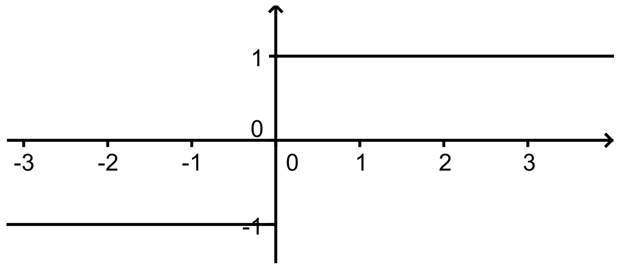


Abbildung 4: Eine Funktion ohne Nullstellen

5 Beispiele

5.1 Zum Stetigkeitsbegriff – P1

Wofür ist dieser eigentlich im Mathematikunterricht (in der AHS in der zehnten Schulstufe) vorgesehen? — Wir geben zwei (neue) Antwortversuche: Erstens kann er exemplarisch das oben angesprochene *Entdecken von Konsequenzen* zeigen, die folgender Wunsch mit sich bringt: Wir wollen Funktionen, deren Graph *„fadenförmig"* verläuft, charakterisieren! Warum? — Um zu sichern, dass Verfahren zur Nullstellensuche funktionieren, wenn positive Funktionswerte und negative Funktionswerte konstatiert werden, also Abbildung 4 ist *nicht erwünscht* (siehe Götz/Reichel 2005, 238). Bekanntlich ringen zwei Definitionen von Stetigkeit um die Vorherrschaft in der Analysis 1 und auch in der sechsten Klasse AHS:

1. Die übliche Definition 1 (Heuser 1986, 215):

   Die auf $X \subset \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion f ist genau dann in $\xi \in X$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ mit $|x - \xi| < \delta$ immer $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ ausfällt.

2. Die übliche Definition 2 (Heuser 1986, 212):

   Die reelle Funktion f ist an der Stelle ξ ihres Definitionsbereichs X stetig, wenn für *jede* Folge $\langle x_n \rangle$ aus X, die gegen ξ strebt, immer auch $f(x_n)$ gegen $f(\xi)$ konvergiert.

Bemerkung: Die Äquivalenz der beiden Definitionen ist ein *Satz*, ebenda, 215.

Die Existenz konkurrierender Definitionen zeigt, dass eine willkürliche bzw. absichtsvolle *Wahl* hinter der Heranziehung der einen oder anderen in einer bestimmten Situation steckt. Das Auftauchen bestimmter Definitionen ist also (oft) begründet, also reden wir auch darüber, machen wir diese Tatsache auch transparent!

Eine erste Konsequenz zeigt die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, deren Graphen Abbildung 5 zeigt. Sie ist bekanntlich *nicht stetig in Null*, was mit Definition 1 sofort einsichtig ist: $\forall\delta > 0\ \exists x$ mit $|x| < \delta$ und $|f(x)| > \frac{1}{2}$, d. h. die Schwankung der Funktionswerte in der Nähe von Null ist nicht „in den Griff" zu bekommen. Es bleibt die Frage offen, ob dieser Graph fadenförmig ist. Wird die Eigenschaft „fadenförmig" des Graphen einer Funktion damit gleichgesetzt, dass sie, die Funktion, stetig ist, dann ist dieser Graph *nicht* fadenförmig. Andererseits, „Löcher" hat er auch nicht.

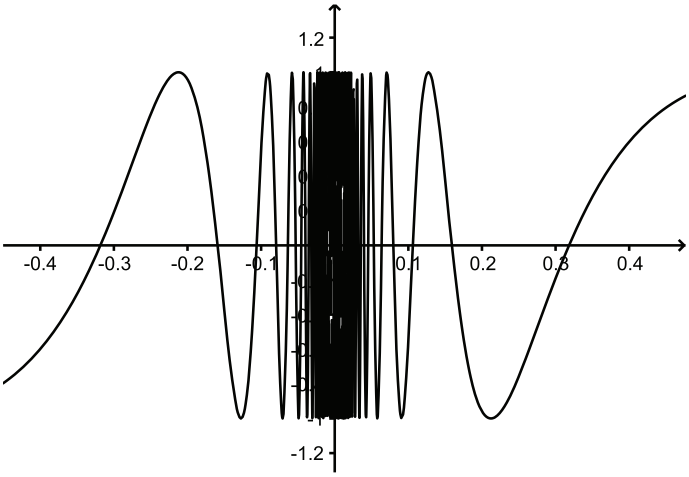


Abbildung 5: Stetigkeit als Fadenförmigkeit versus ε-δ-Stetigkeit

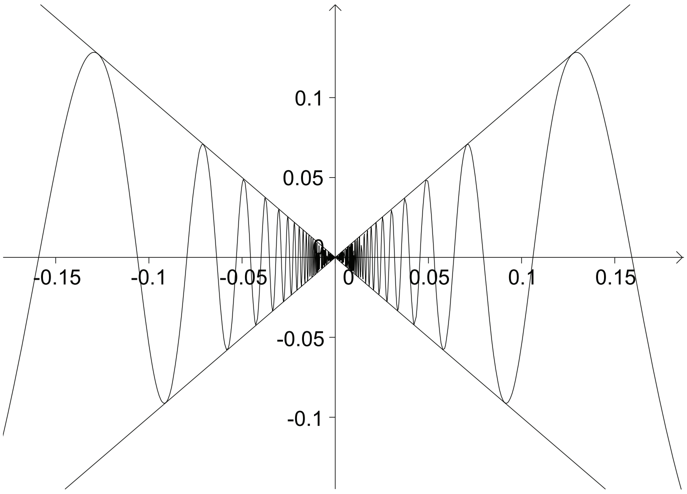


Abbildung 6: Erzwungene Stetigkeit

Die Definiton 2 hier anzuwenden, ist mühsam, betrachte die Folgen $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ versus $y_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ von Argumenten, ihre (bis auf das Vorzeichen jeweils konstanten) Funktionswerte stimmen im Grenzwert n gegen Unendlich, d. h. x_n und y_n gegen Null, nicht überein. Schön, aber wie soll man da darauf kommen? Hier wird die nicht zu unterdrückende Schwankung bei Null noch zusätzlich explizit gemacht, was nicht unbedingt nötig ist und einen kreativen Akt erfordert.

Es ist also *auch eine didaktische* Frage nach der Wahl der „richtigen“, soll heißen passenden, adäquaten, bequemen Definition!

Abbildung 6 zeigt den Graphen einer überall stetigen Funktion. Sie ist durch $g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ definiert: die Schwankung wird durch den Faktor x um Null eingedämmt, aber dort ist sie nicht differenzierbar: $\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$ existiert nicht nach *Definition der Differenzierbarkeit* einer reellen Funktion

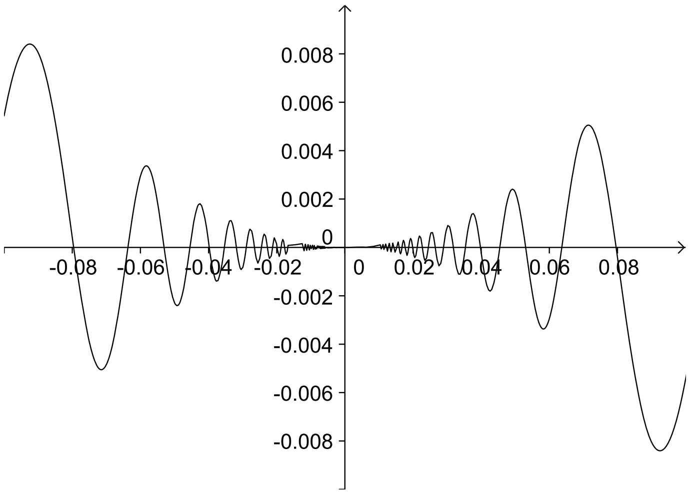


Abbildung 7: Erzwungene Differenzierbarkeit

g in einem Punkt x_0. Wir haben die Schwankung also nur „oberflächlich“ unterdrückt.

Bemerkung: Den gegebenen Funktionsterm nach den üblichen Differentiationsregeln abzuleiten und dann den Grenzwert x gegen 0 zu betrachten, ist nicht unbedingt zulässig. Die Funktion braucht ja nicht stetig differenzierbar in 0 zu sein. Hier ist sie ja nicht einmal differenzierbar in 0.

Jetzt unterdrücken wir gründlicher: wir wählen x^2 statt x als Faktor und erhalten so die Funktion $i(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Sie ist bekanntlich überall stetig und differenzierbar, also auch in Null: die Schwankung der Schwankung wird durch den Faktor x^2 um Null eingedämmt:
$\lim_{h\to 0} \frac{i(0+h)-i(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0$ wieder nach *Definition.* Abbildung 7 zeigt den zugehörigen Graphen.

Zusammenfassend halten wir fest, dass *Stetigkeit* einer Funktion die Fadenförmigkeit des zugehörigen Graphen nach sich ziehen kann, aber auch keine Sprungstellen bedeuten kann, des weiteren eine beliebig klein zu bekommende Schwankung der Funktionswerte, wenn nur die Argumente eng genug beisammen liegen.

Differenzierbarkeit kann keine Knicke im zugehörigen Graphen mit sich bringen oder kein Verlassen des zugehörigen ε-Sektorstreifens: Abbildung 8 nach Tietze/Klika/Wolpers 1997, 192.

Betrachten wir nochmals Abbildung 4 im Lichte des eben Festgestellten. Was schwankt hier? — Nichts: zwei konstante Funktionswerte rufen Definition 2 auf den Plan: $x_n = -\frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{n}$.

Beachte: konstante Folgen konvergieren auch, obwohl sie sich nicht nähern! Das passt so gar nicht zur Vorstellung, dass bei Annäherung der Grenzwert im Endlichen nicht erreicht wird.

Im Gegensatz zu P2 (Kapitel 4: beweis*erzeugte* Definition) geben wir nun ein Beispiel für eine beweis*erzeugende* Definition: Abbildung 9. Auf die Definition kommt’s an! — Also: $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Obwohl der Graph nicht in einem Stück ist, die Funktion nicht

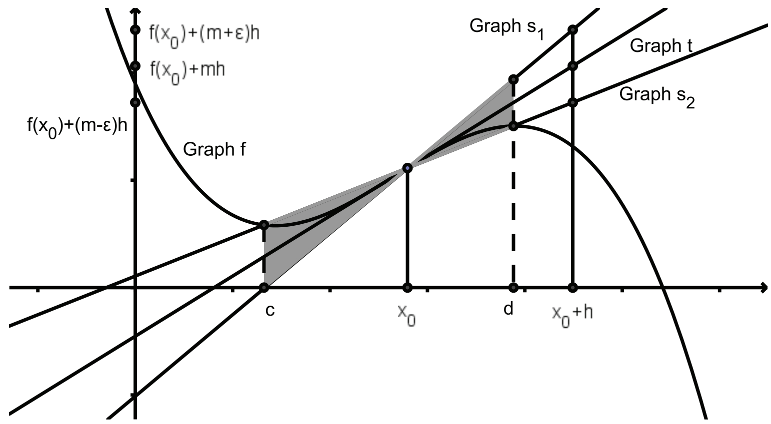


Abbildung 8: Zum ε-Sektorstreifen

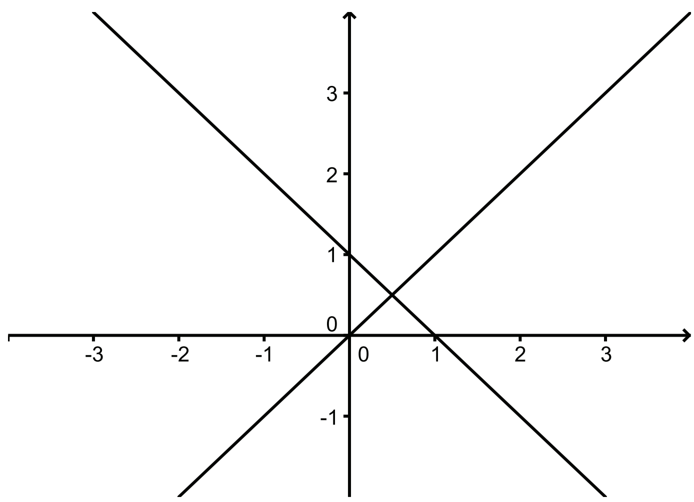


Abbildung 9: Eine (?) stetige (?) Funktion

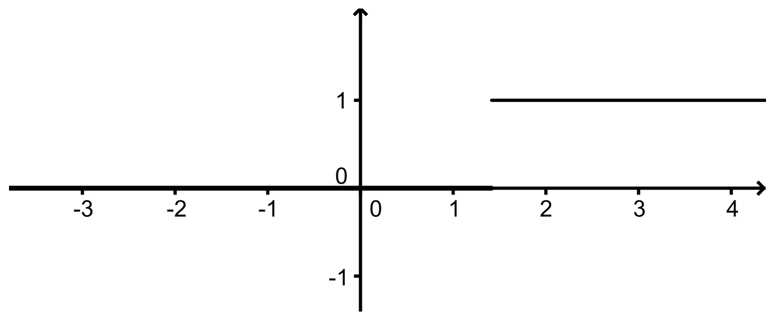


Abbildung 10: Eine stetige (?) Funktion

durch eine Formel gegeben ist und der Graph nicht kontrollierbar schwankt, was so gar nicht zu den Vorstellungen einer (stetigen) Funktion passt, siehe Tall/Vinner 1981, 168, ist f in $\frac{1}{2}$ stetig. Wie kann man das zeigen? — Mit Hilfe von Definition 1! Zu zeigen ist: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \longrightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$, weil:

1. $x \in \mathbb{Q}$: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, also $\delta := \varepsilon$.
2. $x \notin \mathbb{Q}$: $\left|1 - x - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - x\right| < \varepsilon$, also wieder $\delta := \varepsilon$.

Conclusio: Stetigkeit ist eine *lokale* Eigenschaft einer Funktion, sie bezieht sich primär auf eine Stelle. Eine Funktion f ist *global stetig,* wenn f in jedem Punkt lokal stetig ist. Insofern ergibt sich globale Stetigkeit als Konjunktion (i. Allg. unendlich vieler) lokaler Eigenschaften.

Last but not least Abbildung 10. Hierbei soll es sich um eine stetige Funktion handeln. Tatsächlich, denn die Definition von $f\colon \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$ lautet:
$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oder } x^2 < 2 \\ 1 & x > 0 \text{ und } x^2 > 2 \end{cases}$ (Tall/Vinner 1981, 168). Stetigkeit ist immer (auch) bezüglich des Definitionsbereichs zu verstehen.

Bei diesen Beispielen geht es uns selbstverständlich nicht darum, mit „Taschenspielertricks“ Studierende bzw. Schüler(innen) hineinzulegen, um Unsicherheit bei ihnen zu erzeugen. Nein, es geht uns darum, eindrucksvoll und daher hoffentlich nachhaltig zu zeigen, wie komplex einerseits (mathematische) Begriffe sein können, was unter eine scheinbar einfache Definition alles fallen kann. Und andererseits, wie mächtig das Werkzeug „Definition verwenden, sich auf sie berufen“ sein kann, abseits von der bloßen verständnislosen Wiedergabe eines Merksatzes.

5.2 Kegelschnitte

Sie spielen im Mathematikunterricht in Österreich unterschiedliche Rollen: als *Kegelschnitte* eine marginale, als *Ortslinien* bevorzugt in der Unterstufe, als *algebraische Objekte* gerne in der Oberstufe und schließlich als Graph gewisser funktionaler Abhängigkeiten — prominentes Beispiel: *indirekte Proportionalität* — bleiben sie im real existierenden Mathematikunterricht oft ein Mysterium. So deutlich wie sonst kaum bei einem Thema der Schulmathematik entsteht hier (ja muss entstehen!) das Bedürfnis, Zusammenhänge aufzuzeigen! Wie das gehen kann, soll im Folgenden angedeutet werden.

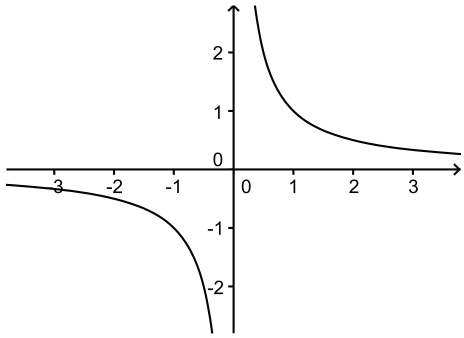


Abbildung 11: $y = \frac{1}{x}$

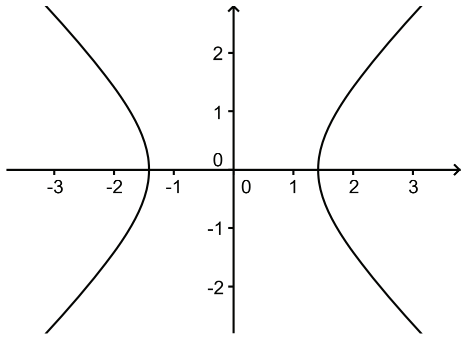


Abbildung 12: Hyperbel in erster Hauptlage

Das Mysterium ist gleich aufgeklärt: entweder durch eine (einfache) *Hauptachsentransformation* (so viele werden während des Studiums gerechnet, warum diese nicht?) oder „zu Fuß“, ein Bild zeigt den Weg: Abbildungen 11 und 12. Eine einfache Drehung um 45° bringt also Klarheit: Aus den *alten Koordinaten* (x, y) mit $y = \frac{1}{x}$ bzw. $x \cdot y = 1$ bzw. $(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ werden mittels der *Drehmatrizen*

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

die *neuen Koordinaten* $(\bar{x}, \bar{y})$ mit $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 2$, also eine (gleichseitige) *Hyperbel* in erster Hauptlage mit $a = b = \sqrt{2}$.

Mit Hilfe der Dandelin'schen Kugeln kann man bekanntlich zeigen, dass Kegelschnitte wirklich den entsprechenden Ortsliniendefinitionen genügen. Die Beweise sind nicht einfach: siehe Götz/Reichel 2006, 218 f.

Wir zeigen einen anderen, einfacheren Zugang, wenngleich der nicht genau dasselbe meint. Abbildung 13 liefert folgende Einsichten: Im rechten Bild ist $\angle(KTC) = 90°$, in der (Zeichen-) Ebene TCK liegt die Achse des Kegels. AP ist die Schnittgerade mit Ebene ε senkrecht auf TK. Im linken Bild erkennen wir, dass diese *Ebene ε den Kegel in einer Kurve c schneidet.* $Q, R \in c$ werden auf Zeichenebene projiziert: P. Es sei weiters $y := \overline{QP} = \overline{PR}$ und $x := \overline{AP}$. Das rechte Bild zeigt, dass AI und GPH parallel zu KC sind, und den Schnittpunkt

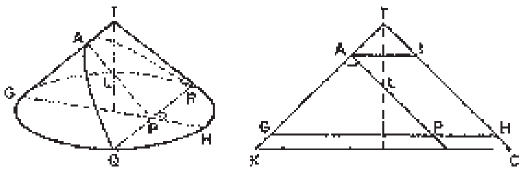


Abbildung 13: Parabel als Kegelschnitt

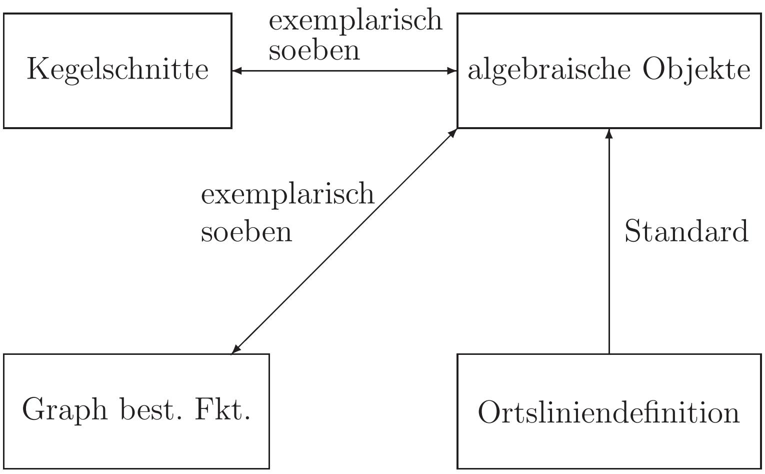
$\{L\} = \varepsilon \cap$ Achse. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y^2 &= \overline{GP} \cdot \overline{HP} = \quad (\text{Thales und Höhensatz}) \\ &= \sqrt{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{HP} = \quad (AG = AP \text{ und } \angle(GAP) = 90^\circ) \\ &= \sqrt{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AI} = \quad (APHI \text{ ist ein Parallelogramm}) \\ &= \sqrt{2} \cdot \overline{AP} \cdot \sqrt{2} \cdot \overline{AL} = \quad (ALIT \text{ ist ein Quadrat}) \\ &= 2 \cdot \overline{AL} \cdot x \;. \end{aligned}$$

Nun ist $\overline{AL} = \overline{AT} =: p =$ const. für alle Punkte auf c.

Umgekehrt kann die Kurve c mit $y^2 = 2px$ durch einen rechtwinkeligen *Schnitt* an einem rechtwinkeligen geraden Kreiskegel realisiert werden, indem man $\overline{TA} = p$ an der Erzeugenden TK von der Spitze T aus abträgt (siehe Abbildung 13, [25]).

Ein Übersichtsdiagramm zeigt, welche Zusammenhänge in diesem Themenkreis begründet werden können:



In Ableitinger/Götz 2009 findet sich ein schönes Beispiel dafür, wie unterschiedliche Zugänge (algebraisch, geometrisch) zu einem bestimmten Problem verschiedene Definitionen einer Hyperbel (algebraisches Objekt, Ortsliniendefinition) bemühen.

Ein zweites Beispiel für das Auftreten von Kegelschnitten sei hier kurz dargestellt: Beim Fußball laufe ein Stürmer im rechten Winkel auf die Toroutlinie zu. Der Abstand von der näher liegenden Torstange zum Schnittpunkt der gedachten Verlängerung der „Laufbahn“ des Stürmers mit der Toroutlinie ist gegeben. In welchem Abstand von dieser sieht er das Tor unter maximalem Winkel? Es sei $\overline{AB} =: a = 7{,}32\,m$ die Breite des Tors AB, $\overline{AF} =: b$ der oben beschriebene Abstand und $\overline{PF} =: x$ die gesuchte Entfernung in Abbildung 14.

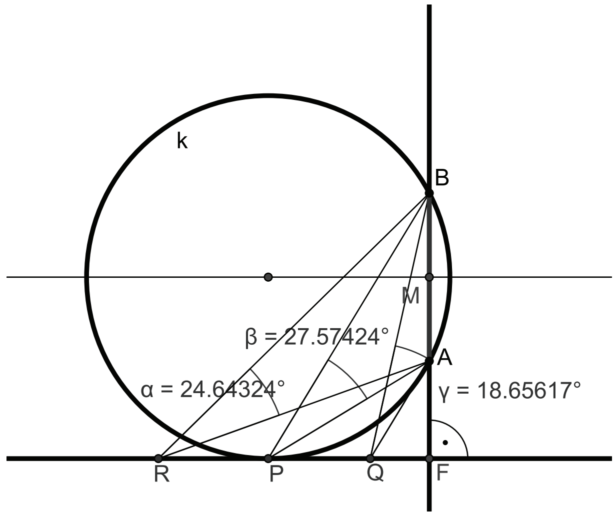


Abbildung 14: Die Situation

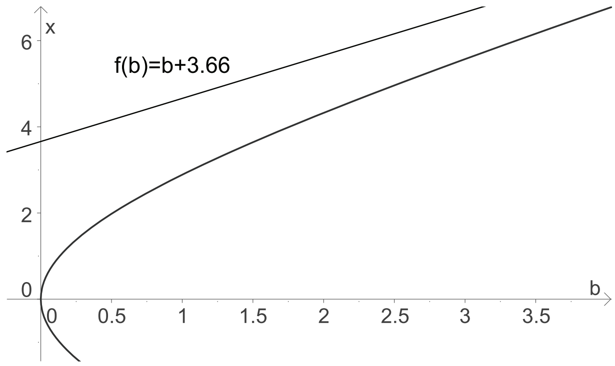


Abbildung 15: Abhängigkeit x von b

P ist der optimale Punkt. — Wie groß ist x? Der Sekanten-Tangenten-Satz gibt Auskunft: $x^2 = b \cdot (b + a) \longrightarrow x = \sqrt{b \cdot (a + b)} = \sqrt{b \cdot (7,32 + b)}$ ergibt ausgeschrieben $(b + 3,66)^2 - x^2 = 13,3956$, also die Gleichung einer Hyperbel: Abbildung 15. Für große Abstände b nähert sich die optimale Entfernung x bis auf eine halbe Torbreite b an.

5.3 Primzahlen

Die übliche Definition z. B. in Bartholomé/Rung/Kern 2008, 80, lautet: Eine Zahl $p > 1 \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler hat, nämlich 1 und sich selber.

Eine häufig gestellte Frage in diesem Zusammenhang ist: Warum lässt man Eins nicht mitspielen?

Die fast ebenso häufig gegebene Antwort meint: ansonsten verliert man die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung!

Ein schon viel seltener gehörter Einwand könnte sein: Gut, aber so ist Eins die einzige natürliche Zahl, die *keine Primfaktorzerlegung* besitzt!

Wenn wir schon nicht von Willkür bei der Definition von mathematischen Begriffen sprechen wollen, dann halten wir jedenfalls aber fest, dass eine profunde a priori-Kenntnis über den fest zu legenden Begriff an sich und über die Funktionen des Begriffs dabei vonnöten sind: was soll er leisten (können)? Nur dann kann über eine(n) vorliegende(n) Definition(sversuch) fundiert geurteilt werden (Pimm 1993, 271).

Übrigens ist *Eindeutigkeit* der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ keine Selbstverständlichkeit: Betrachten wir $G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$, also die Menge der geraden Zahlen, und definieren wir darauf eine *G-Primzahl* (Kuba/Götz 2004, 7): Eine gerade Zahl z nennen wir eine G-Primzahl, wenn es keine geraden Zahlen m und n gibt, so dass $z = m \cdot n$ gilt.

Wie sehen diese aus? — $\{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, \ldots\}$, also die Doppelten von ungeraden Zahlen: Für $60 = 2 \cdot 30 = 6 \cdot 10$ liegen aber zwei verschiedene Zerlegungen in G-Primzahlen vor. Und das ist natürlich kein Einzelfall. Allgemein gilt für $n, m \in \mathbb{N}$: $4 \cdot (2n+1) \cdot (2m+1) = [2 \cdot (2n+1)] \cdot [2 \cdot (2m+1)] = 2 \cdot [2 \cdot (2n+1) \cdot (2m+1)]$.

5.4 Binomialverteilung

Beginnen wir mit der folgenden Definition:

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig verteilte Zufallsvariable mit $\mathrm{P}(X_i = 0) = 1-p$, $\mathrm{P}(X_i = 1) = p$, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt die Verteilung der Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ Binomialverteilung mit den Parametern n und p.

Klingt plausibel, ist aber leider nicht wahr! Es handelt sich hierbei „nur“ um einen Satz! Denn: Definitionen sind immer *Genau dann, wenn-Beziehungen*, diese aber nicht, sie gilt nur in einer Richtung:

Satz 1 (falsch)**.** *Es seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariable dergestalt, dass ihre Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ binomialverteilt ist mit den Parametern n und p. Dann sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig voneinander und es gilt*

$$P(X_i = 0) = 1 - p \ , \quad P(X_i = 1) = p \ , \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Ein *Gegenbeispiel* für $n = 2$ ist

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{3} & \mathrm{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3} \\ \mathrm{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) = \frac{3}{4} & \mathrm{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) = \frac{1}{4} \\ \mathrm{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) = \frac{5}{8} & \mathrm{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{3}{8} \end{array}$$

Es gilt, dass $X_1 + X_2$ binomialverteilt ist mit $n = 2$ und $p = \frac{1}{2}$. Aber: Eine einfache Rechnung zeigt, dass $\mathrm{P}(X_2 = 0) = \frac{2}{3}$ und damit $\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$, das heißt erstens, dass X_1 und X_2 *nicht unabhängig* voneinander sind, und zweitens, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit p nicht konstant ist (Davies 2009, 6).

Wenn man hingegen die obige „Definition“ so liest:

> Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung V auf der Menge $\{0, 1, \ldots, n\}$ heißt Binomialverteilung, wenn es unabhängig verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit $\mathrm{P}(X_i = 0) = 1 - p$ (mit $p \in [0, 1]$) und $\mathrm{P}(X_i = 1) = p$, $i = 1, \ldots, n$, *gibt*, deren Summe die Verteilung V hat.

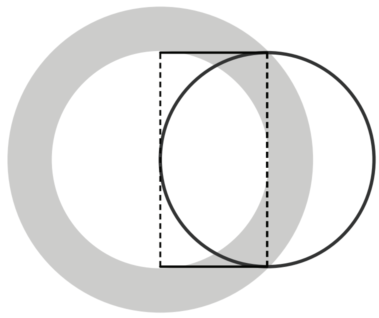


Abbildung 16: Ein Flächenvergleich — wohldefiniert?

Dann ist ebenfalls die Genau dann, wenn-Beziehung erfüllt. (Warum?)

Was keinesfalls passieren darf, ist, dass ein falscher „Umkehrschluss“ gezogen wird: Wenn die *betrachteten* Zufallsvariablen *nicht* diese Eigenschaften haben, dann kann auch ihre Summe nicht der Binomialverteilung genügen. „Geben“ schließt eben nicht aus, dass es nicht auch noch andere Wege gibt, eine Binomialverteilung zu erhalten. Und die gibt es tatsächlich. Die Binomialverteilung mit den Parametern $n = 2$ und $p = \frac{1}{2}$ kann auf (mindestens) zwei Arten zustande kommen: erstens als Verteilung von $S = X_1 + X_2$, wobei X_1, X_2 voneinander unabhängige, identisch zweipunktverteilte Zufallsvariablen mit $p = \frac{1}{2}$ sind. Oder als Summe von jenen zwei abhängigen, zweipunkt- aber nicht identisch verteilten Zufallsvariablen, die wir eben angegeben haben.

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass für jedes $p \in [0, 1]$ genau eine entsprechende Binomialverteilung auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ existiert. Denn sei $X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit } \mathrm{P}(X_i = 1) = p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine zweipunktverteilte Zufallsvariable. Dann ist die Zufallsvariable $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit X_i stochastisch unabhängig voneinander gemäß $\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: p_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, verteilt. Damit haben wir die gesuchte Verteilung: $V = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

5.5 Zur sogenannten Wohldefiniertheit

Eine „wohldefinierte“ Aufgabe (aus MATHE-LMU.DE NR. 20 – Juli 2009, 22): Welcher Flächeninhalt ist größer, der des grau eingefärbten Kreisringes oder der des nach rechts gerückten Kreises (Abbildung 16)?

Erst das richtige (im Sinne der Wohldefiniertheit) Deuten der Hilfslinien (teilweise strichliert) klärt die Lage des Kreises und damit auch die gesuchte Größenbeziehung zwischen Kreisring und Kreis. Das heißt, die zugrundeliegende Frage lautet eigentlich: „Wie liegt der Kreis?“ oder ausführlicher: „Woran erkenne ich, dass die in der Angabe gestellte Aufgabe eindeutig bestimmt ist?“ Das Konzept des Festlegens, des Definierens, soll als Werkzeug, als Methode zum Problemlösen, mit einer weiteren Aufgabe (aus MATHE-LMU.DE NR. 21 – Januar 2010, 22) noch vertieft werden: Abbildung 17.

Auf einem Straßenbahngleis liegt ein Quadrat, dessen Seitenlänge gleich dem Abstand zwischen den Schienen ist. Wie groß ist der Winkel zwischen zwei Geraden, die überkreuzt die Schnittpunkte der Quadratseiten mit den Schienen verbinden?

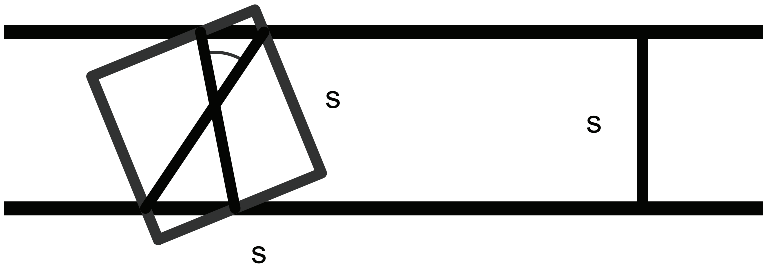


Abbildung 17: Ein (?) gesuchter Winkel — *wohldefiniert?*

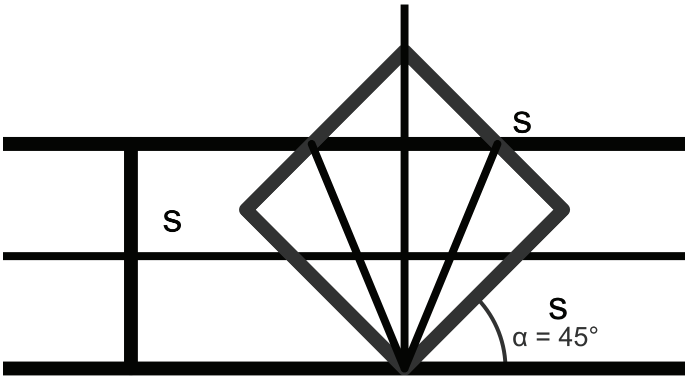


Abbildung 18: Der gesuchte Winkel – wenn es ihn gibt — beträgt 45°.

Wenn wir davon *ausgehen,* dass die Aufgabe, weil sie einer Rätselecke entstammt, wohldefiniert ist, dann sehen wir uns bloß einen Spezialfall davon an, aus dem wir die Lösung sofort erkennen: Abbildung 18.

Apropos Wohldefiniertheit: Ist $\sqrt{4} = \pm 2$ oder nicht? Die Antwort findet sich sehr ausführlich in Reichel 1992. Hier eine Kurzversion: Die reelle Zahl x heißt Quadratwurzel der reellen Zahl $a \geq 0$, wenn $x \geq 0$ und $x^2 = a$ ist. Gibt es immer eine solche Zahl x? Ja, das garantiert die *Vollständigkeit* der reellen Zahlen (ebenda, 122 f.). Sie stellt die Existenz sicher, die Eindeutigkeit ist dann ein Dreizeiler (ebenda, 124).

In Heuser 1986, 78 (leicht gekürzt), finden wir dazu: „Ganz unsinnig ist eine ‚Gleichung' der Form $\sqrt{4} = \pm 2$. [...] Die Lösungen von $x^2 = 4$ werden gerne in der Kurzschreibweise $x_{1,2} = \pm 2$ angegeben, was dann zu dem Missverständnis $\sqrt{4} = \pm 2$ führen kann. [...] Es ist zwar stets $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, jedoch nicht immer $\sqrt{a^2} = a$. Z. B. ist $\sqrt{(-1)^2} \neq -1$."

In $\mathbb{C}$ ist alles anders: Was meinen Sie zu folgender Rechnung:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \ ?$$

Kann sie vielleicht damit erklärt werden, dass $\sqrt{1} = \pm 1$ ist, weil ja sowohl $1^2 = 1$ ist als auch $(-1)^2 = 1$ ist?

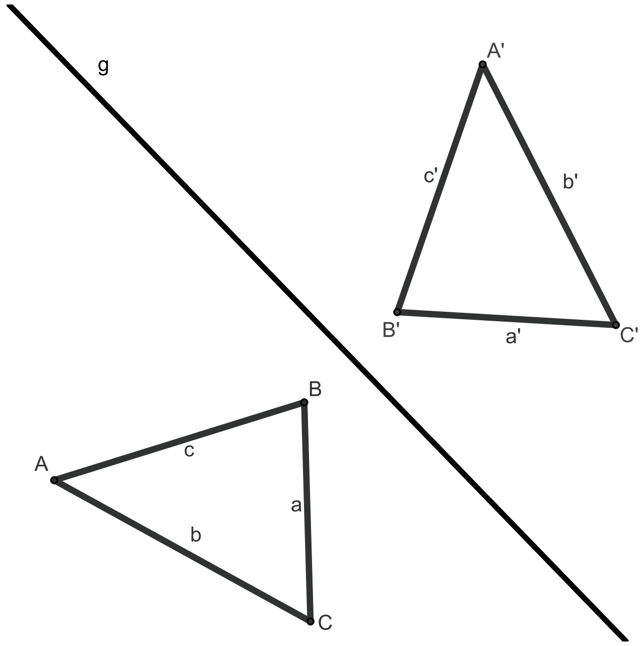


Abbildung 19: Eine Achsspiegelung

Die Rechenregeln für die Wurzeln, die wir aus $\mathbb{R}$ kennen, gelten in $\mathbb{C}$ nicht mehr: es gibt da keine Wurzel*funktion*. Tatsächlich sind dort die Wurzeln mehrdeutig definiert. Die Bedingung $x \geq 0$ in obiger Definition fällt zwangsläufig in $\mathbb{C}$ weg, $\mathbb{C}$ kann ja bekanntlich nicht so angeordnet werden, dass $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper (wie $\mathbb{R}$) wird.

5.6 Geometrie

Kongruenzabbildungen in der Ebene (nach Krauter 2005, Kap. 2) sind ein gutes Beispiel für eine Definition, die durch P2 (Kapitel 4) entsteht. Wir beginnen mit einer einfachen Achsspiegelung: Abbildung 19.

Zwei Achsspiegelungen entsprechen einer *Drehung*: Abbildung 20, oder einer *Translation*, wenn die Achsen parallel liegen.

Die Verkettung von *drei* Achsspiegelungen kann entweder durch eine ersetzt werden: Abbildung 21, das gilt auch für kopunktale Achsen, das sind solche, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Oder es ergibt sich eine sogenannte *Schub- oder Gleitspiegelung:* Abbildung 22. Sie entsteht durch Kombination einer Achsspiegelung und einer Verschiebung in Richtung der Achse.

Zwei Sätze …

Satz 2. *Die Verkettung von drei Achsspiegelungen, deren Achsen nicht in Büschellage liegen (sie schneiden einander also nicht in einem Punkt und sie liegen auch nicht parallel zueinander), ist stets eine Gleitspiegelung.*

Satz 3 (Reduktionssatz)**.** *Die Verkettung von vier Achsspiegelungen lässt sich stets auf eine Verkettung von zwei Achsspiegelungen reduzieren, sie ist also stets eine Translation oder Rotation.*

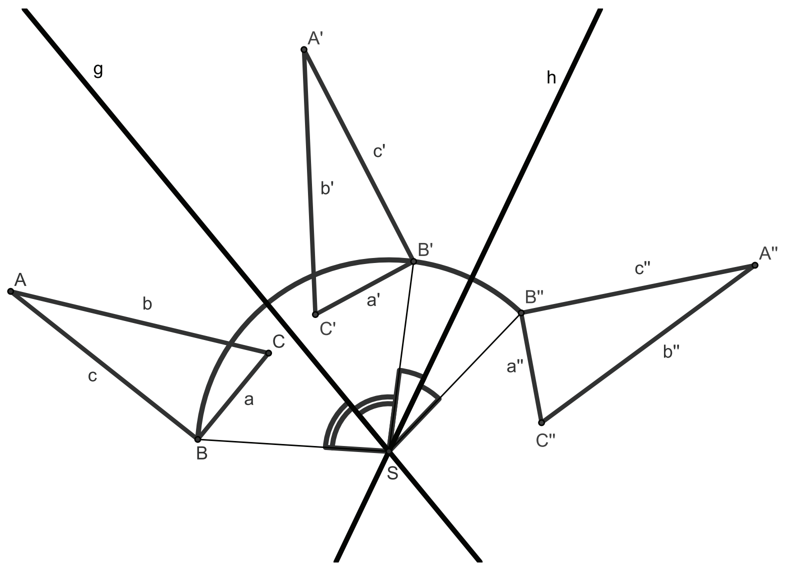


Abbildung 20: Zwei Achsspiegelungen = eine Drehung

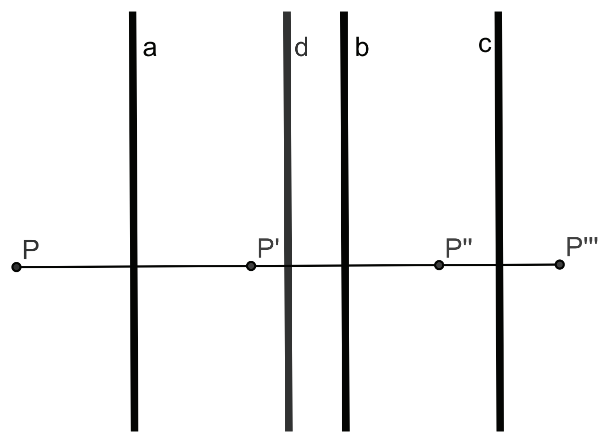


Abbildung 21: Drei parallele Achsspiegelungen $c \circ b \circ a$ = eine Achsspiegelung d

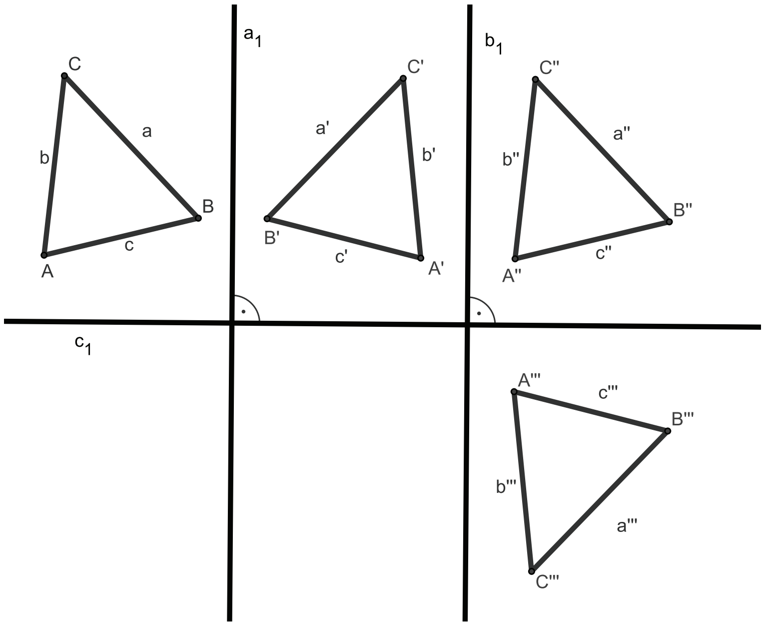


Abbildung 22: Zwei Achsen parallel, eine senkrecht darauf: $c_1 \circ b_1 \circ a_1 =$ eine Gleitspiegelung

... und drei *Korollare*

1. Jede endliche Verkettung von Achsspiegelungen lässt sich als eine Verkettung von *maximal drei* Achsspiegelungen darstellen.
2. Jede Verkettung aus einer
   - *geraden* Anzahl von Achsspiegelungen ist stets eine Rotation oder eine Translation.
   - *ungeraden* Anzahl von Achsspiegelungen ist eine Achs- oder Gleitspiegelung.
3. Es gibt *nur vier* Typen von aus Achsspiegelungen erzeugten Abbildungen: Achspiegelungen, Drehungen, Verschiebungen und Gleitspiegelungen. Jede endliche Verkettung aus solchen Abbildungen ist wieder von einem dieser Typen.

... beschließen eine (formale)[3] *Definition:* Eine *Kongruenzabbildung der Ebene* ist eine Achsspiegelung oder eine Verkettung von endlich vielen Achsspiegelungen.

Eine andere Frage: Was ist ein *Parallelogramm?* — Antwort: Ein Viereck,

1. dessen gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel sind.
2. dessen gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang sind.
3. dessen gegenüberliegende Winkel jeweils gleich groß sind (je zwei benachbarte müssen dann supplementär sein).

[3]Eine wesentlich *anschaulichere Definition* ist: Kongruenzabbildungen in der Ebene sind Abbildungen, die jede Figur in eine dazu deckungsgleiche (kongruente) Figur abbilden.

4. dessen Diagonalen einander halbieren.

Hier ist die Äquivalenz von Definitionen wie schon in Kapitel 5.2 — allerdings auf viel elementarerem Niveau — zu zeigen: z. B. mittels $1 \leftrightarrow 2 \ \wedge \ 1 \leftrightarrow 3 \ \wedge \ 1 \leftrightarrow 4$ oder $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. (Letzteres wäre die elegantere Möglichkeit.) Dabei kann man sich auf die Kongruenzsätze von Dreiecken stützen.

6 Didaktische Reflexion

Begriffsbildungen sprechen immer *Grundvorstellungen* nach vom Hofe und Malle an, wir haben das an der Stetigkeit einer Funktion gezeigt, wo sicher der Aspekt der „Fadenförmigkeit" des zugehörigen Graphen bzw. seine Lückenlosigkeit oft im Vordergrund steht. Dabei haben wir also die *mathematischen Aspekte* betont, vgl. *concept image* and *concept definition* von Tall/Vinner 1981, 151–154. Die grundlegende Frage, die Motivation unserer Betrachtungen in diesem Zusammenhang lautete: „Was bringen mathematische Begriffe, Konzepte an Konsequenzen mit sich, die ursprünglich (zum Teil wenigstens) gar nicht intendiert waren?" Hier geht es uns demnach um eine Analyse mathematischer Begriffe bzw. ihrer Festsetzungen (Definitionen), die auf verschiedenen Ebenen der Tiefe und Komplexität vonstatten gehen kann. Der/die Lehrer(in) kann daher — bei gegebenem fachlichen Hintergrundwissen — justieren, welches Exaktifizierungsniveau er/sie anstrebt. Entscheidend ist, dass Aspekte eines mathematischen Begriffes *bewusst* weggelassen werden, und nicht bloß aus eigener Unwissenheit. Dazu gehört auch, dass man sich im Klaren darüber ist, welche Konsequenzen man sich damit einhandelt bzw. einhandeln könnte.

Der Aspekt der *Willkür* einer definitorischen Festsetzung bzw. der *Auswahl* einer bestimmten Definition unter mehreren, z. B. Eins eine Primzahl oder ε-δ-Stetigkeit versus Folgenstetigkeit, ist ein eminent wichtiger. Virtuosität im mathematischen Denken (auf jedem Niveau) zeigt sich auch dadurch, ob immer die „richtige" Definition für einen Beweis, für ein Problem herangezogen wird. Welche Eigenschaften eines Begriffes werden in einer gegebenen Situation eine Rolle spielen? Denken wir an das eben angeführte Beispiel der verschiedenen Definitionen eines Parallelogramms. Wenn wir den Satz über das Mittenviereck beweisen wollen, das nämlich immer ein Parallelogramm ist, dann tun wir gut daran, die erste Definition des Parallelogramms oben in Betracht zu ziehen. Es ist kein Zufall, dass das gewählte Beispiel hierzu aus der *Geometrie* stammt, sie bietet ein reiches Feld an alternativen Definitionen, vgl. Vinner/Linchevski/Karsenty 1993.

Definitionen sind *kontext- und aufbauabhängig*: was ist eine Definition, was ein Satz? Nehmen wir z. B. die Unabhängigkeit von zwei Ereignissen A, B in der Wahrscheinlichkeitsrechnung her: $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$ oder $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$. Wir müssen argumentieren, warum wir z. B. in der Vorlesung, im Unterricht so und nicht anders definieren. Die erste Definition hier ist inhaltlich einfacher zu interpretieren als die zweite, sie ist intuitiver (Information über B beeinflusst nicht mein Wissen über A), dafür ist die zweite ausbaufähig in Hinblick Unabhängigkeit von Zufallsvariablen. Außerdem ist sie symmetrisch in A und B. Und die bedingte Wahrscheinlickeit $\mathrm{P}(A|B)$ ist für $\mathrm{P}(B) = 0$ nicht definiert.

Definitionen sind *Übereinkünfte* (a) zwischen Lehrenden und Lernenden, z. B. in einer Vorlesung, (b) innerhalb der mathematical community oder (c) lexikalischer Natur (scheinbar objektiv), nach Vinner 1976, 425 ff. Sie fallen also nicht vom Himmel, diese Einsicht kann

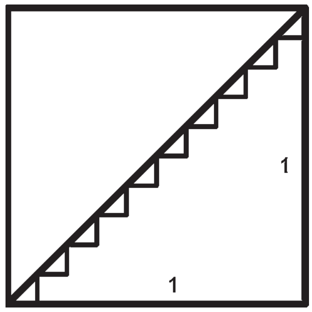


Abbildung 23: $\sqrt{2} \neq 2$

sehr erleichternd sein, weil sie relativiert und erinnert, dass Mathematik von Menschen gemacht wird. Sie ist in diesem Sinne *nicht objektiv*. Jede/r kann und darf in der Mathematik definieren! Allerdings: Ob die Definition sinnvoll ist, ob die Festsetzung wohldefiniert ist, zeigen dann die (Spiel-)Regeln der Mathematik, nicht mehr das Individuum, welches definiert hat. So gesehen wäre es nicht unbillig, wenn Schüler(innen) dieses Recht im Unterricht auch einfordern.

Die *Eigentätigkeit* der Schüler(innen) (vgl. Schneiter/Zimmermann 1985) kann von *selbst Definieren* von einfachen mathematischen Begriffen bis zum Definitionen Formulieren am Ende eines Modellierungs- oder Problemlöseprozesses führen. Dabei sollten folgende Fragen *analysiert* werden: (a) ist es das, was wir wollten?, (b) kämen wir auch mit weniger aus? oder (c) brauchen wir noch etwas zusätzlich? — Die Eigenschaft der *Minimalität* einer Definition kann so thematisiert werden. Am Ende steht dann der Vergleich mit der Lehrbuchdefinition.

Eine (Vor-)Übung in diesem Zusammenhang kann sein, graphisch vorgegebene geometrische Figuren verbal jemandem zu beschreiben, der diese Figur vorher *nicht* gesehen hat. Dieser muss dann aufgrund der verbalen „Definition“ die Figur zeichnen, ein Vergleich mit der Vorlage zeigt, wie sehr dem geflügelten Wort „Ein Bild sagt mehr als tausend Worte“ Tribut gezollt wurde. Auch hier kann das Gebot der Minimalität wenigstens im Nachhinein überprüft werden.

Das Spannungsfeld *Umgangssprache – Fachsprache* spielt auch im Zusammenhang mit Definieren eine wesentliche Rolle. Wir haben das „sich Nähern“ einer konstanten Folge thematisiert, sie ist ja immer schon „da“, oder aber auch (z. B. Müller 1982, 350) Abbildung 23. Hier ist die Annäherung eine scheinbare, oder zumindest eine mit Tücken. Die Bogenlängen der Treppenkurven konvergieren nicht gegen die Länge der Diagonale des Quadrats, auch wenn es scheinbar so aussieht. Die Ecken der Stufen widersetzen sich, erinnern wir uns: die Formel für die Bogenlänge einer Kurve enthält die erste Ableitung der zugrundeliegenden Funktion.

Eine reiche Quelle für Definitionsuntersuchungen bietet der *Funktionsbegriff*, z. B. in Vinner 1983.

7 Ausblick und zum guten Ende

Das *erweiternde Umdefinieren* hat Fritz Schweiger in die didaktische Diskussion eingebracht. An zwei Beispielen sei zum Schluss demonstriert, was er damit meint (Schweiger

o. J., 43, 46). Die Formel $j(R) = ab$ für den Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen $a, b \in \mathbb{N}$ kann durch Auslegen mit dem Einheitsquadrat *begründet* werden, für $a, b \in \mathbb{R}^+$ wird der Flächeninhalt durch dieselbe Formel *definiert*, um $j(\lambda R) = \lambda^2 j(R)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$ und $j(R_1 + R_2) = j(R_1) + j(R_2)$ zu erhalten. Dabei meint $R_1 + R_2$ die disjunkte Vereinigung.

Zweitens *definieren* wir $(-a)(-b) = ab$ in den ganzen Zahlen, um das *Kommutativgesetz bezüglich der Multiplikation* zu erhalten. Dabei ist ab die a-fache Summe von b mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Drei Zitate belegen endlich die in diesem Artikel angesprochenen Aspekte des Definierens im Mathematikunterricht:

> [...] Der Kundige andererseits wird unbefriedigt sein über den oft „halbfertigen“ Zustand der Begriffsdefinitionen, über das Fehlen einer strengen Axiomatik und über die Vorläufigkeit mancher Theorien. Dies aber gehört zum Lernprozess notwendigerweise dazu. Ich bin überzeugt davon, dass sich Begriffe nicht mit einer einmal gegebenen Definition ausbilden, sondern in der laufenden Arbeit an einem wissenschaftlichen Gebiet fortentwickeln und ausdifferenzieren. Diesem Prozess will ich Raum geben. [...]

aus Krauter 2005, Vorwort, zeigt das Entwicklungspotential, das in mathematischen Begriffen steckt, wenn sie immer wieder unter anderen Gesichtspunkten, auf einer anderen Ebene aufgegriffen werden.

Berühmt ist natürlich das folgende Zitat:

> Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.

von Georg Cantor (Kuba/Götz 2004, Cover). Die Kehrseite der Freiheit ist die Willkür, in jedem Fall sind die Folgen des Definierens zu tragen, sie können nicht negiert werden, dies entspricht sozusagen der Verantwortung.

Von Pascal stammt die erste Grundregel des Definierens (zitiert aus Kroll 2010, 48):

> Nichts definieren wollen, was in sich selbst so bekannt ist, dass man keine noch klareren Begriffe hat, um sie zu erklären!

Sie erinnert daran, das Kind nicht mit dem Bad auszuschütten, also nicht „alles“ (im Mathematikunterricht) definieren zu wollen, der Artikel dagegen soll ermuntern, das Wasser wenigstens in die Wanne einzulassen, das heißt den Mathematikunterricht für diese mathematische Grundtätigkeit des Definierens zu öffnen, um bei dem Bild zu bleiben.

Literatur

[1] Ableitinger, C. und Götz, S. (2009): *Erst rechnen, dann kaufen! Konkurrenzgrenzen als Tor zum Modellieren im Mathematikunterricht.* In: Siller, H.-S. und Maaß, J. (Hrg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 13: Modellieren lernen. Schriftenreihe der Istron-Gruppe. Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin, 15–30.

[2] Bartholomé, A., Rung, J. und Kern, H. (2008): *Zahlentheorie für Einsteiger. Eine Einführung für Schüler, Lehrer, Studierende und andere Interessierte.* Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden (6., überarbeitete und erweiterte Auflage).

[3] Davies, P. L. (2009): *Einige grundsätzliche Überlegungen zu zwei Abituraufgaben.* Stochastik in der Schule **29**, Heft 2, 2–7.

[4] Florenski, P. (1997): *Raum und Zeit.* KONTEXTverlag, Berlin.

[5] Götz, S. und Reichel, H.-C. (2005, Hrg.): *Mathematik-Lehrbuch 6* von R. Müller und G. Hanisch. Unter Mitarbeit von C. Wenzel und M. Müller. öbv, Wien.

[6] Götz, S. und Reichel, H.-C. (2006, Hrg.): *Mathematik-Lehrbuch 7* von R. Müller und G. Hanisch. Unter Mitarbeit von C. Wenzel und M. Müller. öbv, Wien.

[7] Heuser, H. (1986): *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* B. G. Teubner, Stuttgart (4., durchgesehene Auflage).

[8] Kant, I. (1781/1787): *Kritik der reinen Vernunft* [KrV]. In ders.: *Werke in zwölf Bänden. Band 3 und 4.* Suhrkamp, Frankfurt am Main (1977).

[9] Krauter, S. (2005): *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken.* Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Herausgegeben von Padberg, F. Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, München.

[10] Kroll, W. (2010): *Hans-Georg Weigand et al., Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Rezension. GDM-Mitteilungen 88, 44–49.

[11] Kronfellner, M. (1998): *Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 24 (Hrg. W. Dörfler und R. Fischer). Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

[12] Kuba, G. und Götz, S. (2004): *Zahlen.* Erschienen in der Reihe „Fischer Kompakt“. Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main.

[13] *Lehrplan für die AHS-Oberstufe.*
`http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf`, 14.7.2010.

[14] *Lehrplan für die AHS-Unterstufe und Hauptschule.*
`http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf`, 14.7.2010.

[15] Müller, H. (1982): *Zur Definition komplizierter Begriffe im Mathematikunterricht.* Mathematik in der Schule **20** (5), 341–353.

[16] Ouvrier-Buffet, C. (2002): *Zum Begriff der Definition. Eine epistemologisch-didaktische Untersuchung.* In Peschek, W. (Hrg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt.* Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 383–386.

[17] Pimm, D. (1993): *Just a Matter of Definition.* Book Review: Raffaella Borasi, Learning Mathematics Through Inquiry. Educ. Stud. Math. **25** (3), 261–277.

[18] Ramharter, E.: „Definition“, *Lexikon der Geisteswissenschaften*, erscheint voraussichtlich 2011.

[19] Reichel, H.-C. (1992): *Ist* $\sqrt{4}$ *wirklich* ± 2*? — Und andere Probleme mit Wurzeln im Mathematikunterricht*. Didaktik-Reihe der ÖMG, Heft 20, 118–127.

[20] Savigny, E. von (1987): *Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren*. dtv, München.

[21] Schneiter, R. und Zimmermann, P. (1985): *Wie eine Definition im Deutsch- und im Mathematikunterricht erarbeitet werden kann*. mathematiklehren 9, 46–50.

[22] Schweiger, F. (o. J.): *Fundamentale Ideen*. Unveröffentlichtes Skriptum.

[23] *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe*. Version 4/07. Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt 2007.
`http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf`, 14.7.2010.

[24] Tall, D. and Vinner, S. (1981): *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educ. Stud. Math. **12** (2), 151–169.

[25] *Themen – Kegelschnitte*.
`http://www.members.tripod.com/sfabel/mathematik/themen_kegelschnitte.html`, 15.2.2010.

[26] Tietze, U.-P., Klika, M. und Wolpers, H. (1997): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen. Didaktik der Analysis*. Unter Mitarbeit von F. Förster. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

[27] Vinner, S. (1976): *The naive concept of definition in mathematics*. Educ. Stud. Math. **7** (4), 413–429.

[28] Vinner, S. (1983): *Concept definition, concept image and the notion of function*. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **14**, No. 3, 293–305.

[29] Vinner, S. (1991): *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*. In Tall, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer, Dordrecht et al., 65–81.

[30] Vinner, S., Linchevski, L. and Karsenty, R. (1993): *How much information should include a geometrical definition? Group discussions with student teachers*. ZDM **25**, No. 5, 164–170.

Stefan Götz
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Nordbergstraße 15 (UZA 4)
A-1090 Wien

`Stefan.Goetz@univie.ac.at`

Esther Ramharter
Universität Wien
Institut für Philosophie
Universitätsstraße 7 (NIG)
A-1010 Wien

`Esther.Ramharter@univie.ac.at`